1 Punti di estremo

1.1 Massimo globale

Si dice che M è **massimo** globale per f su $[a,b]$, e che $x_M \in [a,b]$ è **punto di massimo** per f se:

$$\forall x \in [a,b], f(x) \leq f(x_M)$$

1.2 Minimo globale

Si dice che m è **minimo** globale per f su $[a,b]$, e che $x_M \in [a,b]$ è **punto di minimo** per f se:

$$\forall x \in [a,b], f(x) \geq f(x_m)$$

1.3 Massimo locale

Si dice che M è **massimo locale** per f su $[a,b]$ e x_M è **punto di massimo locale** se:

$$\exists \delta > 0 : \forall xin[a,b] \cap (x_M - \delta, x_M + \delta), f(x) \leq f(x_M) = M$$

1.4 Minimo locale

Si dice che m è **minimo locale** per f su $[a,b]$ e x_M è **punto di minimo locale** se:

$$\exists \delta > 0 : \forall xin[a,b] \cap (x_m - \delta, x_m + \delta), f(x) \geq f(x_m) = m$$

1.5 Massimo locale stretto

Si dice che M è **massimo locale stretto** per f su $[a,b]$ e x_M è **punto di massimo locale stretto** se:

$$\exists \delta > 0 : \forall xin[a,b] \cap (x_M - \delta, x_M + \delta), f(x) < f(x_M) = M$$

1.6 Minimo locale stretto

Si dice che m è **minimo locale stretto** per f su $[a,b]$ e x_M è **punto di minimo locale stretto** se:

$$\exists \delta > 0 : \forall xin[a,b] \cap (x_m - \delta, x_m + \delta), f(x) > f(x_m) = m$$

2 Problemi di massimo e minimo

Dove si trovano i punti di massimo e minimo per una funzione?

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Si trovano dove la *derivata prima si annulla*! Ma non sempre...
Ad esempio, $f(x) = |x|$ ha un punto di minimo globale in $x = 0$.
Inoltre, se $f : [a, b]$, a e b sono *sicuramente* punti di massimo o minimo locale, e potrebbero essere anche punti di massimo o minimo globale.

3 Teorema di Fermat

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *derivabile* in $x_0 \in (a, b)$.
Se x_0 è *punto di estremo locale*, allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in (a, b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), f(x) \geq f(x_0)$$

Se $x < x_0$, allora $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$.
Se $x > x_0$, allora $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$.
Passando al limite di entrambe:

$$x < x_0 \implies \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$x > x_0 \implies \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Il limite appena calcolato è la derivata prima rispettivamente sinistra e destra di x_0.
Essendo però f *derivabile* in quell'intervallo, allora derivate sinistra e destra coincidono, dunque $f'(x_0) = 0$.

4 Teorema di Rolle

Ipotesi Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
f *continua* su $[a, b]$
f *derivabile* su (a, b)
$f(a) = f(b)$

Tesi

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

Dimostrazione Essendo f *continua* su $[a, b]$, essa ammette massimo e minimo per il TEOREMA DI WEIERSTRASS.

$$\exists x_m, x_M \in [a, b] : \forall x \in [a, b], f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

Abbiamo due casi:
- i due estremi coincidono con x_m e x_M, creando allora una funzione costante di derivata prima sempre $= 0$ - altrimenti, almeno uno tra x_m e x_M è *interno* all'intervallo (a, b), e per il TEOREMA DI FERMAT allora $\exists c : f'(c) = 0$.

5 Teorema di Cauchy

Ipotesi Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tali che: f, g *continue* su $[a, b]$
f, g *derivabili* su (a, b)

Tesi

$$\exists c \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Dimostrazione Costruisco la funzione $w(x) = (f(b) - f(a))g(x) = (g(b) - g(a))f(x)$.
Calcolo $w(a)$ e $w(b)$ (omesso per orario), e scopro $w(a) = w(b)$.
Inoltre, w è *continua* su $[a, b]$, e *derivabile* su (a, b). Dal TEOREMA DI ROLLE applicato a w, $\exists c \in (a, b) : w'(c) = 0$