1 Successioni per ricorrenza

Una successione per ricorrenza è una successione definita stabilendo l'elemento di partenza a_0 e l'espressione per il valore successivo a_{n+1}.
E' sempre definita su una semiretta dei numeri naturali: non può esistere un valore per cui non è definito un elemento ma è definito il suo successivo.

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

2 Successioni per ricorrenza monotone

Una successione per ricorrenza è monotona se il suo risultato non ha mai punti critici, ovvero

2.1 Esercizio

Ipotesi $\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n} + 100 \end{cases}$

Tesi $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0$

Dimostrazione Inizio dell'induzione:
Se $\alpha \geq 0$, allora $\alpha \in S$

Passo induttivo:
$n \in S \implies n+1 \in S$
$a_n \geq 0 \implies a_{n+1} \geq 0$
$\sqrt{a_n} + 100 \geq 0$
$\sqrt{\alpha} \geq -100$
$\alpha \geq 0$

2.2 Esercizio

Ipotesi $\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 3 \end{cases}$

Tesi Limite della ricorrenza.

Svolgimento $a_0 = \alpha$
$a_1 = \frac{a_0}{2} + 3 = \frac{\alpha}{2} + 3$
$a_2 = \frac{\frac{\alpha}{2}+3}{2} + 3 = \frac{\alpha}{4} + \frac{3}{2} + 3$
$a_n = \frac{\alpha}{2^n} + 3 * (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}})$
$a_n = \frac{\alpha}{2^n} + 3 * \sum_{i=\alpha}^{n-1} \frac{1}{2^i}$
Congetturo il valore della somma:
svolgimento omesso

$= 2(1 - \frac{1}{2^n})$
Ora posso calcolare il limite:
svolgimento omesso

$= 6$

3 Un modo più veloce

$a_n \to l$
$a_{n+1} \to l$
$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 3$
$\frac{a_n}{2} \to \frac{l}{2}$
$l = \frac{l}{2} + 3$
$l = 6$

Ma a_n ha veramente limite? Se è **monotona**, ha sempre un limite.
Se non ha limite, non possiamo usare questo metodo, perchè darà come risultato $\frac{\infty}{\infty}$, una forma di indecisione.

3.1 Esempio

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \end{cases}$$

Svolgimento $\begin{cases} y = x \\ y = \sqrt{x + 2} \end{cases}$

$$\begin{cases} y = x \\ x = \sqrt{x + 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 = x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$l = 2$

3.2 Esercizio

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che $\alpha \geq 2 \implies \forall n, a_n \geq 2$.

Ipotesi $S = \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq 2\}$

Tesi $S = \mathbb{N}$

Dimostrazione

Passo base $a_0 \geq 2$
$0 \in S$

Passo induttivo $n \in S \implies n + 1 \in S$
$a_n \geq 2 \implies a_{n+1} \geq 2$
$a_n \geq 2 \implies \sqrt{a_n + 2} \geq 2$

Per ipotesi, $a_n \geq 2$, quindi $a_n + 2 \geq 2 + 2 = 4$ e allora $\sqrt{a_n + 2} \geq \sqrt{4} = 2$.

Passo monotono Perchè la successione sia monotona, dobbiamo verificare che $a_n + 1 \leq a_n$.

$\sqrt{a_n + 2} \leq a_n$
Arrivo alla soluzione $a_n \leq -1 \bigcup a_n \geq 2$.
Tengo solo $a_n \geq 2$. Gli altri non sono numeri naturali.

Passo finale a_n monotona $\implies a_n \to l$.
Dunque, esiste un limite, finito o infinito che sia.
todo