1 Intorno

Si dice **intorno** di un numero $x_0 \in \mathbb{R}$ un qualsiasi intervallo aperto del tipo: $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

2 Punti isolati

Si dice **punto isolato** un numero $x_0 \in \mathbb{R}$ se esiste un intorno U di x_0 tale che al suo interno sia presente solo il punto stesso e nient'altro. $U \bigcup A = x_0$

3 Punti di accumulazione

Si dice **punto di accumulazione** un punto tale che non possano esistere suoi intorni che includano il punto stesso come unico elemento.
Sono gli opposti dei punti isolati. $U \bigcap A \ X_0 \neq \emptyset$.

4 Definizione topologica di limite

[todo]

$\forall U_l$ intorno di l
$\exists V_{x_0}$ intorno di x_0
$: x \in V_{x_0}$
$x \neq x_0 \implies f(x) \in U_l$

5 Limite finito all'infinito

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$
$\forall \epsilon > 0, \exists K > 0 : \forall x > K, l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$
$\forall \epsilon > 0, \exists K > 0 : \forall x < K, l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$

ϵ è l'ampiezza della "striscia" in cui stanno i valori di f(x), K è la "barriera" dei valori della x e l è il valore del limite, ovvero "l'altezza" a cui si trova la striscia.

6 Limite infinito all'infinito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \in \mathbb{R}$$

$$\forall H > 0, \exists K > 0 : \forall x > K, f(x) > H$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \in \mathbb{R}$$
$$\forall H > 0, \exists K < 0 : \forall x < K, f(x) > H$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \in \mathbb{R}$$
$$\forall H < 0, \exists K > 0 : \forall x > K, f(x) < H$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \in \mathbb{R}$$
$$\forall H < 0, \exists K < 0 : \forall x < K, f(x) < H$$

7 Asintoto obliquo

La funzione f ha la retta $y = mx + q$ come **asintoto obliquo** per $x \to +\infty$ se:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - q) = 0$$

f ha asintoto obliquo se e solo se:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \neq \infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = q \neq \infty$$

Esempio: $f(x) = e^x + 2x + 1$ ha asintoto obliquo se $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + 2x + 1}{x} = 2$$
$$\lim_{x \to -\infty} (e^x + 2x + 1 - 2x) = 1$$

8 Limite infinito al finito

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$
$$\forall H > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \implies f(x) > H$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$
$$\forall H < 0, \exists \delta > 0 : \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \implies f(x) < H$$

9 Asintoto verticale

$$\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$$