1 Moltiplicazioni tra matrici

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+cf & be+df \\ ag+ch & bg+dh \end{bmatrix}$$

2 Invertibilità di una matrice

Si può verificare se una matrice A quadrata di ordine n è invertibile verificando una di queste definizioni equivalenti:

- Il determinante non è nullo: $\det A \neq 0$.
- Il rango di A è n.
- La trasposta A^T è una matrice invertibile.
- Tutte le righe/colonne di A sono linearmente indipendenti.
- Tutte le righe/colonne di A formano una base di $\mathbb{K}^n$.
- Il numero 0 non è un autovalore di A.
- A è trasformabile mediante algoritmo di Gauss-Jordan in una matrice con n pivot.

3 Stabilire esistenza di funzione lineare

Per controllare se esiste o no una funzione lineare è sufficiente verificare che sia valida la proprietà di linearità:

- Se due vettori sono linearmente indipendenti, anche i risultati della funzione devono essere linearmente indipendenti.

Può essere controllata velocemente vedendo se si verificano le seguenti condizioni:

- Se due vettori di ingresso sono uno multiplo dell'altro, allora anche i vettori di uscita devono essere uno multiplo dell'altro per la stessa costante.
- Se un vettore di ingresso è dato dalla somma di (multipli di) altri, allora anche il vettore di uscita deve essere dato dalla somma di (multipli degli) stessi.

4 Determinazione di matrice associata

Vogliamo trovare la matrice associata (A) di una funzione rispetto a delle nuove basi, ad esempio $< (1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)$.

Procediamo disponendo in verticale gli elementi delle basi, in questo modo:

$$M = \begin{matrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{matrix}$$

Troviamo la matrice inversa con il metodo di Gauss-Jordan:

...

Calcoliamo il risultato di:

$$B = M^{-1} * A * M$$

Il risultato B sarà la nostra nuova matrice associata.

5 Diagonalizzabilità

Una matrice è DIAGONALIZZABILE se ha **tanti autovalori quanto il suo rango**.
Per trovare gli autovalori trovare dove il polinomio caratteristico (determinante della matrice fatta come quella qui sotto) è uguale a 0:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 4 & 5-x & 6 \\ 7 & 8 & 9-x \end{vmatrix} = 0$$

6 Stabilire se una funzione è lineare

Se tutti i termini della funzione sono **polinomi omogenei** di primo grado (non ci sono potenze superiori a 1), allora è automaticamente LINEARE.

7 Immagine

Le BASI DELL'IMMAGINE di una funzione sono i **vettori linearmente indipendenti** che la generano.

8 Iniettività e suriettività

Una funzione lineare è INIETTIVA se **il nucleo è di dimensione 0**, ovvero se l'unico valore che fa risultare 0 alla funzione è il vettore nullo.

Una funzione lineare è SURIETTIVA se la dimensione dell'immagine è minore o uguale al rango della funzione (degli input, il rango della matrice associata): $dim(Im(F)) = rk(M_F)$.

8.1 Matrici quadrate

Se la funzione è un **automorfismo** (campo input = campo output), allora $iniettivita' \Leftrightarrow suriettivita'$.

9 Somma diretta

Un sottospazio è SOMMA DIRETTA se i due sottospazi di cui viene fatta la somma **non hanno basi in comune**, e quindi $dim(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}) = 0$.

9.1 Trovare basi che diano una somma diretta

Per trovare basi che diano una somma diretta, è sufficiente **trovare basi linearmente indipendenti** con quelle che già abbiamo: solitamente parti della base canonica funzionano alla perfezione.