1 Le Serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$, la serie è **convergente**; se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$, la serie è **divergente**.

1.1 Condizione necessaria

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \quad \implies \quad a_n \to 0$$

$$a_n \not\to 0 \quad \implies \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n nonconvergente$$

1.2 Serie a termini non negativi definitivamente

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad a_n \geq 0$$

Se la successione delle somme parziali è *definitivamente* monotona, allora **ha limite**, e quindi **esiste**, convergendo o divergendo.
Possiamo applicare dei particolari criteri per capirlo.

1.3 Criteri

1.3.1 Criterio del confronto

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni a termini reali *non negativi*, tali che *definitivamente* $a_n \leq b_n$.
Allora...

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \implies \sum a_n < +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \implies \sum b_n = +\infty$$

Si usa principalmente quando la serie converge ma non è dimostrabile convenzionalmente.

1.3.2 Criterio del confronto asintotico

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni a termini reali *positivi*, tali che $a_n \sim b_n$.
Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere (entrambe convergono, entrambe divergono, etc).

Solitamente si applica per i limiti notevoli.

1.3.3 Criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} L < 1 & \implies & \sum a_n \neq \infty \\ L > 1 & \implies & \sum a_n = \infty \\ L = 1 & \implies & unknown \end{cases}$$

1.3.4 Criterio della radice

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$.
Supponiamo che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{a_n}^n = L$. Allora...

$$\begin{cases} L < 1 & \implies & \sum a_n convergente \\ L > 1 & \implies & \sum a_n divergente \\ L = 1 & & unknown \end{cases}$$

1.4 Serie a termini qualunque

1.4.1 Criterio di Leibniz

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$$

Se:

$$\begin{cases} a_n \geq 0 a_n \geq a_{n+1} a_n \to 0 \end{cases}$$

1.4.2 Criterio di convergenza assoluta

Se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$$

Allora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$$

1.5 Dimostrazione dei criteri

1.5.1 Criterio del confronto

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$S_n^* = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1.5.2 Criterio del confronto asintotico

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Usiamo la definizione di limite:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n' : \forall n \geq n', 1 - \epsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 1 + \epsilon$$

$$b_n * (1 - \epsilon) \leq \frac{a_n}{b_n} \leq b_n * (1 + \epsilon)$$

Ho ora un'espressione a cui è applicabile il criterio del confronto.

Per la proprietà di monotonia:

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq S_n \leq S_n^*$$

1.5.3 Criterio della radice

$$\forall \epsilon > 0, \exists n' : \forall n \geq n', L - \frac{\epsilon}{2} \leq \sqrt{a_n}^n \leq L + \frac{\epsilon}{2}$$

Per il funzionamento stesso della radice:

$$L < 1 \implies \exists \epsilon > 0 : L + \epsilon < 1; L < 1 - \epsilon$$

Dunque...

$$\sqrt{a_n}^n \leq 1 - \epsilon + \frac{\epsilon}{2} = 1 - \frac{\epsilon}{2}$$

Ho finalmente raggiunto un punto in cui posso usare il criterio del confronto:

$$\sum a_n \leq \sum (1 - \frac{\epsilon}{2})^2$$

2 Tipi di esercizi

Gli esercizi con le serie principalmente sono di tre tipi: calcolare la somma (il valore) di una serie, studiare la convergenza di una serie e studiare la convergenza di una serie che varia in base a un parametro.

2.1 Serie geometriche

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \qquad se |q| < 1 \quad = \frac{1}{1-q}$$

2.1.1 Esempio serie geometrica

Calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

2.2 Serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \begin{cases} \neq \infty & se \quad \alpha > 1 \\ = \infty & se \quad \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Svolgimento E' una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$, quindi la somma vale $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

2.2.1 Serie geometrica nascosta

Calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$.

Svolgimento C'è una serie geometrica nascosta: è possibile convertire la somma in $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^n$, che è una serie geometrica di ragione $\frac{2}{3}$.
Dunque, la somma vale $\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$.

2.2.2 Serie geometrica con inizio spostato

Calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} (\log(3) - 1)^n$.

Svolgimento Verifichiamo che la ragione sia effettivamente < 1: $log(3) - 1 < 1$ è vero.
Si converte la serie in $\sum_{n=0}^{\infty} ((\log(3) - 1)^n) - 1$.
E' diventata una serie geometrica di ragione $\log(3) - 1$ a cui dovrà essere sottratto 1 dal risultato finale.

2.3 Condizione necessaria

Studia la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n!})^n$.

Svolgimento

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{nlog(1+\frac{1}{n!})})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{n\frac{1}{n!}})$$

$$e^{n\frac{1}{n!}} \to 1$$

Dato che l'argomento delle serie non è infinitesimo, allora possiamo dire che la serie non converge.

2.4 Dipendenti da parametro

Calcolare per quali valori di x la serie seguente converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x-2}{4})^n$$

Svolgimento Riconosciamo che è una serie geometrica, e sappiamo che converge se la sua ragione è $|r| < 1$.
Calcoliamo per quali valori è presente quella ragione:

$$|\frac{x-2}{4}| < 1$$

$$-1 < \frac{x-2}{4}| < 1$$

$$-2 < x < 6$$

2.5 Criterio del confronto difficile

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^2 n}{n\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log^2 n}{n\sqrt{n}} = 0$$

Non concludo nulla da questo limite; devo usare un criterio.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^2 n}{n\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^2 n}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{logn}{n^{\alpha}} = 0$$

$$\log n \leq n^{\alpha}$$

$$\log n \leq n^{\frac{1}{8}}$$

$$\log^2 n \leq n^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{log^2 n}{n\sqrt{n}} \leq \frac{n^{\frac{1}{4}}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$$

Applichiamo poi il teorema di confronto. [TBD]

2.6 Criterio di confronto asintotico difficile

Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ la serie converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + e^{-n}}{\sqrt{n^{\alpha}} + logn}$$

Non posso usare la condizione necessaria, perchè $a_n \to 0$.
Applico il criterio del confronto asintotico.

$$a_n \sim \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$$

E' una serie armonica generalizzata.
Per $\alpha > 2$, la serie converge, mentre per $\alpha \leq 2$ la serie diverge.

2.7 Criterio della radice

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{n^{2n}}$$

$$\sqrt{a_n}^n = (\frac{e^{n^2}}{n^{2n}}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{e^n}{n^2} \to +\infty$$

2.8 Criterio del rapporto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{n^{2n}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L$$

$$\frac{e^{(n+1)^2}}{(n+1)^{2(n+1)}} * \frac{n^{2n}}{e^{n^2}}$$

$$\frac{e^{2n+1}}{(n+1)^2} * (\frac{n}{n+1})^2 n$$

$$\frac{e^{2n+1}}{(n+1)^2} * (\frac{1}{1 + \frac{1}{n})^2 n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^{2n+1}}{(n+1)^2} * (\frac{1}{1 + \frac{1}{n})^2 n}$$

$$+\infty * \frac{1}{e} = +\infty$$

$+\infty > 1$, dunque la serie diverge.