1 Teorema di Bolzano-Weierstrass

1.1 Ipotesi

Successione a_n **limitata** (superiormente e inferiormente).

1.2 Tesi

Esistono INFINITE SOTTOSUCCESSIONI (relative alla successione iniziale) convergenti.

1.3 Dimostrazione

Chiamiamo A_0 l'insieme che contiene tutti i punti della successione.
Eseguiamo la seguente procedura per $k = 0$.

1. Chiamiamo $[\alpha_k, \beta_k]$ i due estremi dell'intervallo della successione.
   Prendiamo il punto medio tra i due estremi, e chiamiamolo γ_k.
   Osserviamo che $\alpha_k \leq \gamma_k \leq \beta_k$, e che la dimensione d_k dell'intervallo $[\alpha_k, \gamma_k] = [\gamma_k, \beta_k]$ è la metà di $[\alpha_k, \beta_k]$.
2. Creiamo due insiemi di punti della successione: uno con i punti tra $[\alpha_k, \gamma_k]$ e uno con i punti tra $]\gamma_k, \beta_k]$.
3. Almeno uno dei due insiemi ha un numero infinito di punti: prendiamolo, e chiamiamolo A_{k+1}.

Possiamo ripetere questa procedura un numero infinito di volte: possiamo notare che le dimensioni dell'intervallo $d_k = (\frac{d_0}{2^k}) \to 0$; dato che A_k contiene infiniti punti, possiamo creare una sottosuccessione che includa solo punti contenuti in A_k.
Essa sarà convergente per il teorema dei carabinieri ad un valore L tale che $\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_k \leq L \leq \beta_k \leq \cdots \leq \beta_0$.

2 Polinomio di Taylor con resto di Peano

2.1 Definizioni preliminari

$$P_{n,x_0}(x) = (\sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0) * (x-x_0)^m}{m!})$$

2.2 Ipotesi

Funzione $f(x) :]a, b[\to \mathbb{R}$, **derivabile** n volte in x_0 e $n-1$ volte in $]a, b[$.
Punto $x_0 \in]a, b[$.

2.3 Tesi

La funzione $f(x)$ è APPROSSIMABILE nel punto x_0 con il polinomio $P_{n,x_0}(x) + o(x-x_0)^n$ di grado n.

2.4 Dimostrazione

Notiamo che $P^n_{n,x_0}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$.
Proviamo a calcolare il seguente limite, che ci sarà utile nel prossimo passaggio:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_{n-1,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} =^{DH} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(1)}(x) - P^{(1)}_{n-1,x_0}(x)}{n*(x-x_0)^{n-1}} =^{\infty DH} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - P^{(n-1)}_{n-1,x_0}(x)}{n!*(x-x_0)^1} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!*(x-x_0)}$$

Ora siamo pronti a calcolare il limite con n invece che $n-1$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}$$

Estraiamo un termine dal polinomio:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_{n-1,x_0}(x) - \frac{f^{(n)}(x_0)*(x-x_0)^n}{n!}}{(x-x_0)^n}$$

Raccogliamo termini in modo da formare il limite precedente:

$$\lim_{x\to x_0} (\frac{f(x) - P_{n-1,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} - \frac{\frac{f^{(n)}(x_0)*(x-x_0)^n}{n!}}{(x-x_0)^n})$$

Facciamo uscire dal limite le costanti:

$$-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_{n-1,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}$$

Per il limite precedente:

$$-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!*(x-x_0)}$$

Raccogliamo $\frac{1}{n!}$:

$$\frac{1}{n!}(-f^{(n)}(x_0) + \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)})$$

Abbiamo ottenuto un rapporto incrementale, il che significa che:

$$\frac{1}{n!}(-f^{(n)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)) = 0$$

3 Teorema di esistenza degli zeri

3.1 Ipotesi

Funzione $f(x) : [a_0, b_0] \to \mathbb{R}$ **continua**.
$f(a_0) = f(b_0)$.

3.2 Tesi

Esiste ALMENO UN PUNTO in cui $f(x) = 0$.

3.3 Dimostrazione

Notiamo che $f(a_0) * f(b_0) \leq 0$ (ovvero è negativa, cioè hanno due segni diversi).
Definiamo la seguente procedura:

1. Bisezioniamo l'intervallo $[a_n, b_n]$ in $[a_n, z_n]$ e $[z_n, b_n]$.
2. Almeno uno dei due intervalli è tale che $f(inizio) * f(fine) \leq 0$ (negativo).
3. Prendiamo un intervallo per il quale il prodotto precedente è negativo, e chiamiamolo $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Ripetendo infinite volte la procedura, partendo dall'intervallo $[a_0, b_0]$, otterremo un intervallo sempre più "verticalmente stretto" $[a_n, b_n]$.
Possiamo notare che $a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$, e che entrambe le successioni tendono allo stesso numero $a_n \to x$ e $b_n \to x$.
Calcoliamo nuovamente $f(a_n) * f(b_n)$: sappiamo che risulta essere ≤ 0, ma possiamo sostituire il limite: $f(x) * f(x) \leq 0$.
Dunque, abbiamo che $f(x)^2 \leq 0$, e quindi che $\exists x : f(x) = 0$.

4 Teorema di Weierstrass

4.1 Ipotesi

Funzione $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continua**.

4.2 Tesi

$f(x)$ assume entro $[a, b]$ un VALORE MASSIMO e un VALORE MINIMO.

4.3 Dimostrazione per il massimo

Chiamiamo $M = sup(f)$ l'estremo superiore della funzione f: vogliamo dimostrare che esso è anche il massimo, e che quindi il massimo esiste per la funzione.
Dobbiamo quindi TROVARE UN VALORE x tale che $f(x) = M$.
Creiamo una successione y_n che ci aiuti a trovare il valore di $f(x)$:

- Se $M = +\infty$, allora $y_n = n$ (in modo che la successione $\to +\infty$).
- Se $M \neq +\infty$, allora $y_n = M - \frac{1}{n}$ (in modo che la successione $\to M$).

Possiamo dire che $y_n < M$, ed essendo M il minimo dei maggioranti di $f : [a, b]$:

$$\forall n, \exists x_n : (y_n < f(x_n) \leq M) \wedge (a < x_n \leq b)$$

Passando al limite, per il *teorema dei carabinieri* abbiamo che $f(x_n) \to M$.
Inoltre, per il *teorema di Bolzano-Weierstrass* sappiamo che esiste una sottosuccessione convergente $x_{k_n} \to x$ di x_n.
Essendo la funzione *continua*, allora $x_{k_n} \to x \implies f(x_{k_n}) \to f(x)$.
Essendo però la sottosuccessione *un'estratta*, allora abbiamo anche che $f(x_{k_n}) \to M$.
Per il *teorema dell'unicità del limite* allora deduciamo che $M = f(x_{k_n})$, e quindi che $x_{k_n} = x$.

4.4 Dimostrazione per il minimo

La stessa cosa, ma con $inf(f) = -sup(-f)$.

5 Teorema di Fermat

5.1 Ipotesi

Funzione $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ **derivabile** in un punto $x_0 \in]a, b[$.
x_0 punto di estremo locale.

5.2 Tesi

$f'(x_0) = 0$.

5.3 Dimostrazione per il minimo locale

Sappiamo che se x_0 è un **minimo locale**, esiste obbligatoriamente un intorno $I \subset [a, b]$ in cui $\forall x \in I, f(x_0) \leq f(x)$.
Possiamo provare a calcolare il suo rapporto incrementale: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
Notiamo che mentre il numeratore è sempre positivo, il denominatore cambia in base a se $x > x_0$.
Allora, $f'_-(x_0) \leq 0$, e $f'_+(x_0) \geq 0$.
Essendo la funzione **derivabile**, e quindi $f'_-(x) = f'_+(x)$ l'unica possibilità è che $f(x_0) = 0$.

5.4 Dimostrazione per il massimo locale

La stessa cosa, ma con $-f$.

6 Teorema di Rolle

6.1 Ipotesi

Funzione $f(x)$ tale che

- sia **continua** in $[a, b]$
- sia **derivabile** in $[a, b]$
- $f(a) = f(b)$

6.2 Tesi

$\exists x_0 : f'(x_0) = 0$ (ovvero la funzione è COSTANTE o ha ALMENO UN PUNTO STAZIONARIO)

6.3 Dimostrazione

Se la funzione è **continua**, allora per il *teorema di Weierstrass* sappiamo che ha almeno un punto di massimo x_M e uno di minimo x_m in $[a, b]$.
Se i valori di entrambi i due punti coincidono con $f(a) = f(b)$, allora la funzione è COSTANTE.
Se almeno uno dei due valori è diverso da $f(a) = f(b)$, allora per il *teorema di Fermat* $f'(x_0) = 0$.

7 Teorema di Cauchy

7.1 Ipotesi

Funzioni $f(x)$ e $g(x)$ tale che

- siano **continue** in $[a, b]$
- siano **derivabili** in $[a, b]$

7.2 Tesi

$\exists c : ((f(a) - f(b))g'(c) = (g(a) - g(b))f'(c))$

7.3 Dimostrazione

Creiamo una funzione w tale che $w(x) = (f(a) - f(b))g(x) - (g(a) - g(b))f(x))$.
Essendo formata dalla differenza di due funzioni **continue**, è anche essa continua.
Essendo formata dalla differenza di due funzioni **derivabili**, è anche essa derivabile.
Sostituendo, notiamo che $w(a) = w(b)$.
Allora, per il teorema di Rolle, sappiamo che ha un punto stazionario c tale che $w'(c) = 0$.
Con $w'(c) = 0$, abbiamo che $\exists c : ((f(a) - f(b))g'(c) = (g(a) - g(b))f'(c))$.

7.4 Significato geometrico

Il significato geometrico del teorema di Cauchy è che presa una qualsiasi curva, essa ha almeno un punto in cui la pendenza è uguale alla pendenza della retta tra i punti a e b.

8 Teorema di Lagrange

8.1 Ipotesi

Funzione $f(x)$ tale che

- sia **continua** in $[a, b]$
- sia **derivabile** in $[a, b]$

8.2 Tesi

$\exists c : f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

8.3 Dimostrazione

Il *Teorema di Cauchy*, con $g(x) = x$.

9 Teorema della media integrale

9.1 Ipotesi

1. Funzione $f(x)$ **integrabile** in $[a, b]$
2. Funzione $f(x)$ **continua**

9.2 Tesi

1. $inf(f) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) \leq sup(f)$
2. $\exists z : (\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) = f(z))$

9.3 Dimostrazione

Per la definizione di integrale, $inf(f) < f(x) < sup(f)$, quindi anche $inf(f) < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) < sup(f)$.
Se la funzione è anche **continua**, allora per *Weierstrass* esistono un massimo M e un minimo m.
Allora, $\forall x, m \leq f(x) \leq M$.
Ma per la definizione di integrale, $m = \int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx = M$.
E in particolare, $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$.

10 Teorema fondamentale del calcolo integrale

10.1 Ipotesi

Funzione $f(x)$ **integrabile** in $]a, b[$
Funzione $G(x) :]a, b[$ **primitiva** di $f(x)$

10.2 Tesi

$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$

10.3 Dimostrazione

Prolunghiamo la primitiva $G(x)$ per continuità:

- $G(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x)$
- $G(b^-) = \lim_{x \to b^-} f(x)$

La primitiva ora è continua in $[a, b]$.
Possiamo allora partizionarla in un numero infinito di intervalli $[a, x_i] = \cdots = [x_j, b]$.
Per il *teorema di Lagrange*, $\forall$ *partizione* $"n"[c, d], \exists z : G(d_n) - G(c_n) = G'(z_n)(d_n - c_n) = f(z_n)(d_n - c_n)$.
Allora, possiamo dire che $G(b) - G(a) = \sum_{j=0}^n f(z_j)(d_j - c_j) = S_j$.
Abbiamo dunque una somma di Cauchy-Riemann, e possiamo dire che $G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)$.

11 Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

11.1 Ipotesi

Funzione $f(x)$ **integrabile**.
Funzione $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$

11.2 Tesi

Funzione $F(x)$ CONTINUA $f(x)$ *continua* $\Longrightarrow$ $F'(x) = f(x)$