1 Equazioni in $\mathbb{C}$

Come possiamo fare a risolvere equazioni in numeri complessi?
Una possibile soluzione è quella di applicare la definizione di numero complesso $z = a + \mathrm{i}b$.
Effettuiamo le seguenti sostituzioni:

$$Rez = a$$

$$Imz = b$$

$$z = a + \mathrm{i}b$$

$$\bar{z} = a - \mathrm{i}b$$

Spostando tutti gli elementi al primo membro, giungeremo ad avere al secondo membro $= 0 + 0i$; possiamo allora fare un sistema con la parte reale e la parte immaginaria del primo membro e risolverlo per a e b; infine, dovremo verificare manualmente tutte le soluzioni trovate in questo modo.

1.1 Esempio

[todo, non l'ho copiato]

1.2 Altro esempio

$$\begin{cases} z\bar{w} = \mathrm{i} \\ |z|^2 w + z = 1 \end{cases}$$

Passiamo la seconda equazione ai coniugati.

$$\bar{|z|^2 w + z} = 1 = \bar{1} = 1$$

$$|\bar{z}|^2 \bar{w} + \bar{z} = 1$$

Vado a ricavare z dalla prima equazione.
Se $z \neq 0$, allora...

$$\bar{w} = \frac{\mathrm{i}}{z}$$

E obbligatoriamente $z \neq 0$, perchè altrimenti l'equazione non sarebbe verificata.
Sappiamo che il modulo $|z|^2 = (Rez)^2 + (Imz)^2 = z\bar{z}$, dunque tornando alla seconda equazione:

$$\frac{z\bar{z}\mathrm{i}}{z} + \bar{z} = 1$$

$$\bar{z}\mathrm{i} + \bar{z} = 1$$

Risolvo la seconda equazione:

$$a\mathrm{i} + a + b - b\mathrm{i} - 1 = 0$$

$$\begin{cases} a + b - 1 = 0 \\ a = b \end{cases}$$

$$a = b = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}$$

$$\bar{w} = \frac{\mathrm{i}}{z} = \frac{\mathrm{i}}{\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}} = \frac{2\mathrm{i} + 2}{2} = 1 + \mathrm{i}$$

2 Forma trigonometrica dei numeri complessi

Possiamo rappresentare i numeri complessi in un'altra forma, invece che quella algebrica.
Rappresentiamo un complesso composto da un modulo ρ e un argomento θ corrispondente all'angolo formato da il semiasse positivo del piano cartesiano e la semiretta che congiunge z e l'origine.

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\begin{cases} a = Rez = |z| \cos(\theta) \\ b = Imz = |z| \sin(\theta) \end{cases}$$

[esempi omessi tanto sono sulle dispense]

3 Teorema

Siano $z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ e $w = r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin(\theta))$, allora:

$$zw = \rho r(\cos(\theta + \phi) + \mathrm{i}\sin(\theta + \phi)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{r}(\cos(\theta - \phi) + \mathrm{i}\sin(\theta - \phi))$$

3.1 Potenza di un complesso

$$z^n = \rho^n(\cos(n\rho) + \mathrm{i}sin(n\rho))$$

3.1.1 Esempio

Calcolare $(1 + \mathrm{i})^{16}$.

Svolgimento Troviamo la forma trigonometrica:

$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\pi 4))$$

$$(1 + \mathrm{i})^{16} = 2^4(\cos(4\pi) + \mathrm{i}sin(4\pi))$$

3.1.2 Esempio

$$i^{2018} = i^{504*4} * i^2 = -1$$

4 Radici ennesime di numeri complessi

Sia $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$, allora esistono n radici ennesime complesse $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ di w, tali che:

$$z_i^n = w \qquad i = 0, ..., n-1$$

Inoltre:

$$w = r(\cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi))$$

$$z_K = \rho_K(\cos(\phi_K) + \mathrm{i}\sin(\phi_K)) \qquad k = 0, ..., n-1$$

$$\rho_K = r^{\frac{1}{n}}$$

$$\phi_K = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi K}{n}$$