1 Proprietà dell'integrale

Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Siano $\alpha, \beta, a, r, b \in \mathbb{R}$.
Allora:

- $\alpha f + \beta g$ è integrabile:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

- Se $a \leq r \leq b$, allora f è integrabile su $[a, r]$ e $[r, b]$, e in particolare:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^r f(x)dx + \int_r^b f(x)dx$$

- Se $f \geq g$, allora $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
- Se f è integrabile in $[a, b]$, allora $|f|$ è integrabile (ma non il contrario!).

2 Teorema della media integrale

2.1 Prima parte

Ipotesi f integrabile su $[a, b]$

Tesi

$$inf f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq sup f$$

Dimostrazione Sappiamo che $inf f \leq f(x) \leq sup f$.
Per la 3a proprietà dell'integrale, allora:

$$\int_a^b inf f dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b sup f dx$$

Possiamo portare fuori le costanti per la 1a proprietà:

$$inf f \int_a^b 1dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq sup f \int_a^b 1dx$$

Allora:

$$inf f(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq sup f(b-a)$$

E se $b - a \neq 0$...

$$inf f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq sup f$$

2.2 Seconda parte

Ipotesi

- $inf f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq sup f$
- f continua su $[a, b]$

Tesi $\exists z : \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(z)$

Dimostrazione Cambiamo forma alla tesi:

$$\exists z : \int_a^b f(x)dx = f(z) * (b-a)$$

Se la funzione è continua in $[a, b]$, per il teorema di Weierstrass sappiamo che:

$$\exists x_m, x_M : min f = m = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = M = max f$$

Per la prima ipotesi, allora:

$$min f = inf f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq sup f = max f$$

Essendoci un minimo e un massimo, ed essendo la funzione continua, possiamo dire per il teorema dei valori intermedi che:

$$\exists z : \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(z)$$

3 Funzione primitiva

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Si dice che G è **primitiva** di f se:

- G è DERIVABILE
- $\forall x \in [a, b] G' = f(x)$

3.1 Proposizione

Due primitive della stessa funzione definite sullo stesso intervallo differiscono per una costante.

Dimostrazione G_1, G_2 primitive di f

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_1'(x) = f(x), G_2'(x) = f(x)$$
$$G_1'(x) - G_2'(x) = 0$$
$$(G_1 - G_2)'(x) = 0$$
$$G_1 = G_2 + C$$

3.1.1 Se non si è su un intervallo...

Esistono primitive di una funzione che non differiscono per una costante, ma per qualcosa di più.

Esempio

$$G_1(x) = \begin{cases} log(x) & se\ x > 0 \\ log(-x) & se\ x < 0 \end{cases}$$

$$G_2(x) = \begin{cases} 1 + log(x) & se\ x > 0 \\ log(-x) & se\ x < 0 \end{cases}$$

3.2 Funzioni senza primitiva

$$\delta(x) \qquad delta\ di\ Dirac$$

Dimostrazione Per assurdo, immaginiamo esista una primitiva F di f.
Negli intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ si ha che $F'(x) = 0$, e quindi che la funzione è costante.
Se la funzione è una (primitiva), significa che dev'essere DERIVABILE, e quindi CONTINUA.
Ma la funzione originale non è continua, perchè ha un salto in $x = 0$. Assurdo.

4 Integrale indefinito

$$\int f(x)dx$$

L'integrale indefinito qui sopra indica l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$.

Esistono funzioni che hanno primitiva, ma non è esprimibile:

$$\int \frac{sint}{t} dt$$