1 Studi di funzione

1.1 Studio di funzione classico

$$f(x) = 2arctan(x) - x$$

1.1.1 Funzione f

Dominio Il dominio in un punto è il più grande insieme possibile su cui è valida la funzione f.

In questo caso, il dominio è $\mathbb{R}$

Simmetrie Verifichiamo se la funzione ha simmetrie: è pari? È dispari?

$arctan(x)$ è dispari, e x è anch'esso dispari, quindi andiamo a verificare.

$$f(-x) = 2arctan(-x) + x = -2arctan(x) + x = -f(x)$$

E' dunque dispari.

Positività Troviamo dove la funzione è positiva o negativa.
Spesso richiede calcoli molto complessi, quindi potrebbe non valer la pena perderci tempo.

Ad esempio, in questo caso.

Periodicità Controlliamo se e dove la funzione è periodica.
Come per la positività, potrebbe richiedere calcoli complessi, quindi non è particolarmente importante.

Come qui.

Intersezioni con gli assi Troviamo dove la funzione f interseca gli assi x e y.
Vedi sopra; non è fondamentale...

E indovina un po'? Anche qui lo saltiamo.

Asintoti verticali e orizzontali Vediamo se la funzione ha degli asintoti.
Troviamo tutti i limiti rilevanti di f.
A $+\infty$ e a $-\infty$, in punti di non derivabilità, etc...

$$\lim_{x \to +\infty} (2arctan(x) - x) = -\infty$$

Essendo una funzione dispari, allora...

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Asintoto obliquo Controlliamo se esiste un asintoto obliquo.
Non è fondamentale, ma potrebbe essere interessante da calcolare.
E' presente solo se $\lim_{x \to \infty} = \pm\infty$.
Se lo fa, possiamo calcolarlo.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{2arctan(x) - x}{x} = -1$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} (2arctan(x) - x) + x = \pi$$

Dunque, l'asintoto obliquo è la retta $y = -x + \pi$.

1.1.2 Derivata prima f'

$$f'(x) = \frac{2}{1 + x^2} - 1$$

Crescenza Troviamo dove la funzione è crescente o decrescente.

$$\frac{2 - 1 - x^2}{1 + x^2} \geq 0$$

$$\frac{1 - x^2}{1 + x^2} \geq 0$$

$$x^2 \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

Punti di estremo Troviamo i punti di massimo e i punti di minimo, e se possibile il loro valore.

Nel nostro caso, $x = -1$ è un punto di minimo locale e $x = 1$ è un punto di massimo locale.
Vediamo quanto valgono:

$$f(1) = 2arctan(1) - 1 = 2\frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi - 2}{2} \approx 0.6$$

$$f(-1) = 2arctan(-1) + 1 = -2\frac{\pi}{4} + 1 = \frac{-\pi + 2}{2} \approx -0.6$$

1.1.3 Derivata seconda f''

Potrebbe non essere richiesta, se si creerebbe un calcolo complicato.

$$f''(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

Concavità Troviamo dove la funzione è concava e dove è convessa.

$$-\frac{4x}{(1+x^2)^2} \geq 0$$
$$x \geq 0$$

Punti di flesso Troviamo i punti di flesso:

Nel nostro caso, l'unico è $x = 0$.

1.2 Esercizio

Fai un grafico qualitativo di $log|4-x| + \frac{2}{|x-4|}$.

Simmetrie E' simmetrica per l'asse $x = 4$, ma il punto nell'asse stesso è fuori dal dominio. Possiamo però traslare il tutto ponendo $x - 4 = t$...

$$f(t) = \log(|t|) + \frac{2}{|t|}$$

. Ora la funzione $f(t)$ è pari.

Dominio

$$t \in \mathbb{R} : t \neq 0$$

Positività

> E' un casino!

Limiti [todo]

1.2.1 Derivata prima

> Il valore assoluto è una specie protetta; gli informatici non hanno la licenza di derivarlo.

Dividiamo la funzione in casi.

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} \log t + \frac{2}{t} & t > 0 \\ \log(-t) - \frac{2}{t} & t < 0 \end{cases}$$

Deriviamo i due rami separatamente:

$$\tilde{f}'(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} & t > 0 \\ [todo] & t < 0 \end{cases}$$

1.3 Studio di funzione qualitativo in un punto

Esiste, ma non l'abbiamo fatto.