1 Definizione

$$f : A \subseteq dom(f) \to \mathbb{R}, continua$$

$$A = [a, b]$$

f è derivabile in x_0 se **esiste ed è finito** il limite del rapporto incrementale:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

f è il **coefficiente angolare** della retta tangente a $f(x_0)$.

1.1 Equazione retta tangente al grafico di f in $x_0, f(x_0)$

$$y = f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0)$$

2 Derivate particolari

$f = costante$; $f' = 0$
$f = x$; $f' = 1$
$f = x^2$; $f' = 2x$
$f = x^n$; $f' = nx^{n-1}$

2.0.1 Dimostrazione di x^n

[todo]

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} x^\alpha * (\frac{\frac{(x+h)}{x}^\alpha - 1}{h})$$

$$\lim_{h\to 0} x^\alpha * (\frac{e^{\log(\frac{(x+h)}{x}^\alpha)} - 1}{h})$$

$$\lim_{h\to 0} x^\alpha * (\frac{e^{\alpha\log(\frac{(x+h)}{x})} - 1}{h})$$

$$\lim_{h\to 0} x^\alpha * (\frac{e^{\frac{\alpha h}{x}}) - 1}{h})$$

2.0.2 Non derivate il valore assoluto

Campagna pubblicitaria: chi deriva il valore assoluto muore (accademicamente).
$|x|$ non è derivabile in $x = 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \nexists$$
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

3 Derivate sinistra e destra

Derivata destra:

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Derivata sinistra:

$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

[todo: migliorare un po']

- Se sono uguali e finite, esiste la derivata in quel punto;
- se sono diverse e almeno una delle due finita, si ha un **punto angoloso**;
- se sono diverse e infinite, la tangente esiste ed è completamente verticale;
- se sono uguali e infinite, si forma una cuspide.

4 Teorema di continuità

Se f è derivabile in x_0, allora f è continua.

Tesi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Dimostrazione

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) * \frac{x - x_0}{x - x_0}$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} * (x - x_0)$$
$$f'(x_0) * 0 = 0$$

4.1 Conseguenze

f derivabile in $x_0 \implies f$ continua in x_0
f non continua $\implies f$ non derivabile
f continua $\not\Longrightarrow f$ derivabile
f non derivabile $\not\Longrightarrow f$ non continua

4.1.1 Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Non continua in $x = 0$, quindi non derivabile in quel punto.
In tutti gli altri casi, $f'(x) = 0$.

5 Regole di calcolo

$$(f + g)' = f' + g'$$
$$(kf)' = kf'$$
$$(f * g)' = (f' * g) + (f * g')$$
$$(\frac{f}{g})' = \frac{(f' * g) - (f * g')}{g^2}$$

5.1 Regola della catena

Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$ e x_0 è punto di accumulazione per $dom(g \circ f)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) * f'(x_0)$$

5.1.1 Esempio

$$f(x) = \sin^2(4\sqrt{x} + 2$$
$$f'(x) = 2\sin(4\sqrt{x} + 2) * \cos(4\sqrt{x} + 2) * (4 * \frac{1}{2\sqrt{x}})$$

5.1.2 Esempio

$$f(x) = \arctan \frac{2x}{\sqrt{x^3 + 1}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\frac{2x}{\sqrt{x^3 + 1}}} * \frac{2\sqrt{x^3 + 1} - 2x}{x^3 + 1} * \frac{3x^2}{2} * \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}}$$

5.2 Derivata della funzione inversa

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua e strettamente monotona $\implies f$ invertibile
f^{-1} funzione di f
f derivabile in $x_0 \implies f^{-1}$ derivabile in $f(x_0) = y_0$

$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

5.2.1 Esempio

$$f(x) = x + e^x$$
$$\exists f^{-1}$$

Determinare l'equazione della tangente al grafico di f^{-1} in (1, 0).

$$y_0 = f(x_0) = 0 + e^0 = 1$$
$$x_0 = f^{-1}(y_0) = 0$$

$$f^{-1\prime}(y_0) = \frac{1}{1 + e^x}$$
$$y - f^{-1}(y_0) = (f^{-1})'(y_0) * (x - y_0)$$
$$y - 0 = \frac{1}{1 + e^1} * (x - 1)$$
$$y = \frac{1}{1 + e} * (x - 1)$$

6 O piccolo

Date due funzioni f e g definite in un intorno di x_0, diciamo che $f(x) = o(g(x))$, f è **o piccolo** di g per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

6.0.1 Esempio

$$x^2 = o(x) \qquad x \to 0$$

Sì, perchè $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0$.

6.0.2 Esempio

$$sinx = o(x) \qquad x \to 0$$

No, perchè $\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$.

6.1 Proposizione

$f(x) \sim g(x) f(x) = g(x) + o(g(x)) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \lim_{x \to x_0} -1 = 0 \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$