1 Sottosuccessioni

Si dice **sottosuccessione** di una successione $\{a_n\}_n$ la composizione $a_n \circ K$ dove $K : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è strettamente crescente.
$(a_n \circ K)(n) = a_{K_n} = a_{2n}$
Praticamente sono successioni il cui dominio non è $\mathbb{N}$, ma solo una parte di esso, ed è dato da un'altra successione K_n.

Se $a_n \to l \in \mathbb{R}$, allora anche $a_{K_n} \to l$.
Se $\forall K : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, a_{K_n} \to l$, allora $a_n \to l$.
Se una successione ha **limite** l, tutte le estratte hanno lo **stesso limite**.
Viceversa, se tutte le sottosuccessioni hanno lo **stesso limite** l, allora anche la principale ha **limite** l.
Se esistono due sottosuccessioni con **limiti diversi**, allora la successione di partenza **non ha limite**.

Posso utilizzare le sottosuccessioni per trovare il limite di una successione solo quando l'unione del dominio di queste dia come risultato $\mathbb{N}$.

2 Teorema di bisezione

Se in un intervallo "di limite" c'è almeno un punto di accumulazione, allora anche dividendolo in due parti il punto di accumulazione rimarrà in almeno una di queste due.

3 Punto limite

Se a_n ha una sottosuccessione convergente a l, si dice che l è un **punto limite**.

4 Enunciato teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia $\{a_n\}_n$ una **successione limitata**.
Allora, esiste almeno una sottosuccessione a_{K_n} di a_n **convergente**.

5 Dimostrazione teorema di B-W

Siccome $\{a_n\}$ è limitata, allora esistono $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}, \alpha_0 \leq a_n \leq \beta_0$.
Chiamiamo $I_0 = [\alpha_0, \beta_0]$ l'intervallo tra questi due punti.
Prendiamo l'insieme $A_0 = \{n : a_n \in I_0\}$ di tutti i punti all'interno di questo intervallo.
A_0 contiene infiniti valori, essendo una successione in $\mathbb{N}$.
Applichiamo il teorema di bisezione: il punto medio dell'intervallo è $\mu_0 = \frac{\alpha_0+\beta_0}{2}$.

L'intervallo ora risulta diviso in $I_0 = [\alpha_0, \mu_0] \cup [\mu_0, \beta_0]$.
Per il teorema di bisezione, almeno uno tra $[\alpha_0, \mu_0]$ e $[\mu_0, \beta_0]$ è infinito.
Se l'infinito è $[\alpha_0, \mu_0]$, allora $\alpha_1 = \alpha_0$ e $\beta_1 = \mu_0$.
Se l'infinito è $[\mu_0, \beta_0]$, allora $\alpha_1 = \mu_0$ e $\beta_1 = \beta_0$).
In ogni caso, $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta_0$
Creiamo un nuovo intervallo $I_1 = [\alpha_1, \beta_1]$.

Ripetiamo il procedimento di bisezione con α_1 e β_1: dovremmo ottenere ancora un risultato dimezzato.
Dopo n passi, otteniamo un intervallo $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$ infinitamente piccolo.
Dunque, $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq \cdots \leq \beta_2 \leq \beta_1 \leq \beta_0$.

$\beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n}$
$A_n = \{m : a_m \in I_n\}$ è infinito.
Possiamo dimostrare per induzione che le precedenti tre righe sono vere $\forall n \in \mathbb{N}$.
Dunque, $\{\alpha_n\}$ è una successione **monotona crescente**, e ha limite l, e $\{\beta_n\}$ è una successione **monotona decrescente**, ed essa ha limite m.

Sapendo per la GERARCHIA DEGLI INFINITI che $\frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n}$ tende a 0, allora possiamo anche dire che $\beta_n - \alpha_n$ tende a 0, quindi $l = m$.
$\forall n$, prendo $K_n \in A_0, a_{K_n} \in I_n, \alpha_n \leq a_{K_n} \leq \beta_n$.
Per il TEOREMA DEI CARABINIERI, visto che α_n e β_n tendono ad l, allora anche a_{K_n} tenderà ad l.

Se a_n è **limitata**, allora a_n ha un **punto limite**, ma non viceversa.